Correction SIGMA n°2B

Exercice 1 - Inspiré EDHEC 1995

1. A l'instant 0, le mobile est en O donc

$$\boxed{P(E_{0,0}) = 1 \text{ et } P(E_{0,-1}) = P(E_{0,1}) = 0.}$$

Puisqu'à l'instant 0 le mobile est en O, il sera en A avec probabilité p et en B avec probabilité q, c'est à dire

$$\boxed{P(E_{1,0}) = 0,\ P(E_{1,1}) = p \text{ et } P(E_{1,-1}) = q}$$

2. (a) Le mobile ne reste pas sur place entre deux instants successifs donc pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\boxed{P_{E_{n,i}}(E_{n+1,i}) = 0.}$$

Si le mobile est en O à l'instant n, il sera à l'instant $n+1$ en A avec probabilité p et en B avec probabilité q donc

$$\boxed{P_{E_{n,0}}(E_{n+1,1}) = p \text{ et } P_{E_{n,0}}(E_{n+1,-1}) = q.}$$

Si le mobile est en A ou en B alors à l'instant $n+1$ il retourne en O donc

$$\boxed{P_{E_{n,1}}(E_{n+1,0}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,0}) = 1 \text{ et } P_{E_{n,1}}(E_{n+1,-1}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,1}) = 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\{E_{n,-1}, E_{n,0}, E_{n,1}\}$ est un système complet d'événements finis. On a donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$,

$$P(E_{n+1,i}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,i})P(E_{n,-1}) + P_{E_{n,0}}(E_{n+1,i})P(E_{n,0}) + P_{E_{n,1}}(E_{n+1,i})P(E_{n,1}).$$

En utilisant les résultats de la question (2)(a) on obtient

$$\boxed{\mathrm{P}(E_{n+1,-1}) = q\mathrm{P}(E_{n,0}),\ \mathrm{P}(E_{n+1,0}) = \mathrm{P}(E_{n,-1}) + \mathrm{P}(E_{n,1}) \text{ et } \mathrm{P}(E_{n+1,1}) = p\mathrm{P}(E_{n,0}).}$$

3. (a) Le résultat de la question (2)(b) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n+1,-1}) \\ \mathrm{P}(E_{n+1,0}) \\ \mathrm{P}(E_{n+1,1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n,-1}) \\ \mathrm{P}(E_{n,0}) \\ \mathrm{P}(E_{n,1}) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.
Pour $n = 0$ on a bien $M^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = M^n U_0$. Alors on a $U_{n+1} = MU_n = MM^n U_0 = M^{n+1}U_0$. Donc l'égalité reste vraie au rang $n+1$.

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0.}$$

(c) Le script Scilab est

```
n = input("Entrez n: ")
p = input("Entrez p: ")
q = input("Entrez q: ")

M = [0, q , 0 ; 1, 0, 1 ; 0, p, 0]
U0 = [0; 1; 0]
U = M^n*U0
disp(U)
```

4. (a) Pour montrer que Q est inversible il suffit de résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} qx_1 + x_2 + qx_3 &= y_1 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 &= y_2 \\ px_1 - x_2 + px_3 &= y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \quad\quad + qx_3 &= y_1 + y_3 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 &= y_2 \\ px_1 - x_2 + px_3 &= y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \quad\quad + qx_3 &= y_1 + y_3 \\ \quad\quad\quad 2x_3 &= y_1 + y_2 + y_3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \quad - x_2 &= -py_1 + qy_3 & L_3 \leftarrow L_3 - pL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_2 &= py_1 - qy_3 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Vous pouvez également utiliser la méthode du cours pour trouver Q^{-1}

(b) Calculons QDQ^{-1}.

$$\begin{aligned} QDQ^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } QDQ^{-1} = M.}$$

(c) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.
Pour $n = 0$ on a bien $QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3 = M^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = QD^nQ^{-1}$, alors

$$M^{n+1} = M^nM = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

L'égalité reste donc vraie au rang $n + 1$ et donc on a obtenu que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = QD^nQ^{-1}.}$$

5. (a) Tout d'abord, on sait d'après le cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons U_n.

$$U_n = M^n U_0 = QD^nQ^{-1}U_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n q & 0 & q \\ (-1)^{n+1} & 0 & 1 \\ (-1)^n p & 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1}q + q \\ (-1)^n + 1 \\ (-1)^{n+1}p + p \end{pmatrix}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P(E_{n,-1}) = \frac{q}{2}\left((-1)^{n+1}+1\right),\ P(E_{n,0}) = \frac{1}{2}\left((-1)^n+1\right) \text{ et } P(E_{n,1}) = \frac{p}{2}\left((-1)^{n+1}+1\right)}$$

(b) On a en particulier $P(E_{2n,0}) = \frac{1}{2}\left((-1)^{2n}+1\right) = 1$. On aurait pu prévoir ce résultat car à l'instant 0 le mobile est en O, à l'instant 1 en A ou B, à l'instant 2 le mobile revient en O, etc... Ainsi, à tout instant pair, le mobile est en O et donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'événement } E_{2n,0} \text{ est certain.}}$$

Exercice 2

Soit a et b des réels avec $0 < a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ existent bien et } u_n > 0,\ v_n > 0.$$

Tout d'abord, on a bien $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et v_n existent bien et que $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
On a alors $u_n + v_n > 0$ donc, en particulier, $u_n + v_n \neq 0$ et ainsi u_{n+1} et v_{n+1} existent bien.
De plus, $u_n^2 > 0$, $v_n^2 > 0$ et $u_n + v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. La propriété reste vraie au rang $n+1$.
On peut donc affirmer, d'après le principe de récurrence, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ existent bien et } u_n > 0,\ v_n > 0.}$$

2.
```
n = input("Entrez n:")
a = input("Entrez a:")
b = input("Entrez b:")
u = a
v = b
for i=1:n
    x=u^2/(u+v)
    v=v^2/(u+v)
    u=x
end
disp(u,"un=")
disp(v,"vn=")
```

3. (a) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}$.

Tout d'abord, $x_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{a}{b}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^{2^0} = \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}$, alors

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\frac{u_n^2}{u_n+v_n}}{\frac{v_n^2}{u_n+v_n}} = \frac{u_n^2}{v_n^2} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 = x_n^2 = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^{n+1}}$$

donc l'égalité reste vraie au rang $n+1$.
On peut donc affirmer, d'après le principe de récurrence, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} - \frac{v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{(u_n+v_n)(u_n-v_n)}{u_n+v_n} = u_n - v_n = y_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n$ donc

$$\boxed{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > u_n > 0$ et

$$\frac{u_n^2}{u_n+v_n} < \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$$

autrement dit $u_{n+1} < u_n$.

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

5. (a)

$$\frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_k}{\frac{v_k^2}{u_k+v_k}} = \frac{u_k+v_k}{v_k} = \frac{u_k}{v_k} + 1 = x_k + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^k} + 1 = 1 + x^{2^k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{v_k}{v_{k+1}} = 1 + x^{2^k}.}$$

(b) On a, d'après (4)(a)(i), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_0}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_{n+1}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{1}{v_{n+1}}.}$$

Probléme - Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent. Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geq 2$.

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.

On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $P(X_0 = a) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

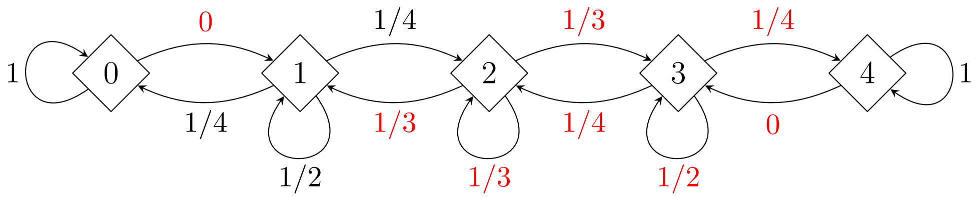
1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

   (a) Si aucune personnes ne veut voter pour A les deux personnes se rencontrant veulent toutes les deux voter pour B et il n'y a pas de changement. D'où
   $$\boxed{p_{0,0} = P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = 1.}$$
   De même si toutes les personnes veulent voter pour A, les deux qui se rencontrent veulent voter pour A et il n'y a aucun changement, et
   $$\boxed{p_{4,4} = P_{(X_k=4)}(X_{k+1} = 4) = 1.}$$

   (b) Chaque jour une personne au maximum change d'avis donc si $X_k = i$, alors le lendemain
   $$i - 1 \leq X_{k+1} \leq i + 1$$
   et si $|i - j| > 2$ cette condition n'est pas vérifiée donc
   $$\boxed{p_{i,j} = 0.}$$

   (c) Si $X_k = 1$, on a :
   Pour avoir $X_{k+1} = 0$, il faut que la première personne tirée vote pour B ; or il y en a 3 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{3}{4}$.
   Il faut de plus que la deuxième personne tirée vote pour A ; or il y en a 1 sur les 3 restantes donc la probabilité est de $\frac{1}{3}$. On obtient donc
   $$\boxed{p_{1,0} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.}$$
   Pour avoir $X_{k+1} = 2$, il faut que la première personne tirée vote pour A ; or il y en a 1 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{1}{4}$.
   Il faut de plus que la deuxième personne tirée vote pour B ; or il y en a 3 sur les 3 restantes donc la probabilité est de 1. On obtient donc
   $$\boxed{p_{1,2} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.}$$
   Enfin, comme $(X_k = i)_{0 \leq i \leq 4}$ est un système complet d'évènements et $p_{1,3} = p_{1,4} = 0$ par la question précédente, on a :
   $$\boxed{p_{1,1} = 1 - p_{1,0} - p_{1,2} - p_{1,3} - p_{1,4} = \frac{1}{2}.}$$

(d) Les justifications sont les mêmes que pour la question précédente



2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Avec le système complet d'évènement $(X_n = i)_{0 \leq i \leq 4}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1) \\ &= 0 + p_{1,1} P(X_n = 1) + p_{2,1} P(X_n = 2) + 0 \\ &\boxed{= \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2)} \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2) \\ &= 0 + p_{1,2} P(X_n = 1) + p_{2,2} P(X_n = 2) + p_{3,2} P(X_n = 3) + 0 \\ &\boxed{= \frac{1}{4} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{4} P(X_n = 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 3) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 3) \\ &= 0 + p_{2,3} P(X_n = 2) + p_{3,3} P(X_n = 3) + 0 \\ &\boxed{= \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{2} P(X_n = 3)} \end{aligned}$$

Le produit Mu_n donne alors :

$$\boxed{MU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2) \\ \frac{1}{4} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{4} P(X_n = 3) \\ \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{2} P(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = U_{n+1}}$$

On démontre l'égalité $U_n = M^n U_0$ par récurrence sur n.

- **Initialisation :** On a $M^0 = I_2$ et $M^0 U_0 = U_0$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= M \times U_n \\ &= M \times M^n U_0 \\ &= M^{n+1} U_0 \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0}$.

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.

On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-iéme jour.

1. Soit n un entier naturel.

   (a) Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Sachant que $X_n = k$, pour avoir $X_{n+1} = k+1$ il faut que l'un des k électeurs voulant voter pour A soit tiré en premier (probabilité $\frac{k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des $m-k$ voulant voter pour B (probabilité $\frac{m-k}{m-1}$) donc

   $$\boxed{P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k}{m} \times \frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}\ ;}$$

   Sachant que $X_n = k$, pour avoir $X_{n+1} = k-1$ il faut que l'un des $m-k$ électeurs voulant voter pour B soit tiré en premier (probabilité $\frac{m-k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des k voulant voter pour A (probabilité $\frac{k}{m-1}$) donc

   $$\boxed{P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \tfrac{m-k}{m} \times \tfrac{k}{m-1} = \tfrac{k(m-k)}{m(m-1)}\ ;}$$

   Enfin, on remarque que sachant $X_n = k$, X_{n+1} est compris entre $k-1$ et $k+1$ donc

   $$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k-1) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k+1) = 1$$

   donc on obtient

   $$\boxed{P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \tfrac{2k(m-k)}{m(m-1)}.}$$

   (b) On calcule $\pi_{n+1,k} = P(X_{n+1} = k)$ pour $k \in [\![1, m-1]\!]$. Avec le système complet d'évènement $(X_n = j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ et en appliquant la formule des probabilités totales, on a

   $$\begin{aligned}
   \pi_{n+1,k} &= \sum_{j=0}^{n} P(X_n = j) P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k)\\
   &= \sum_{j=0}^{n} \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k)\\
   &= \sum_{j=0}^{k-2} \pi_{n,j} \times 0 + \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) + \sum_{j=k+2}^{n} \pi_{n,j} \times 0\\
   &= \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k)\\
   &= \pi_{n,k-1} \times \frac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k} \times \left(1 - 2\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\right) + \pi_{n,k+1} \times \frac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)}\\
   &\boxed{= \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.}
   \end{aligned}$$

2. (a) On montre par récurrence sur n les propositions

   $$\mathcal{P}_n : \left\{ \forall k \in [\![1, m-1]\!], \pi_{n,k} \le \left(\frac{m(m-1) - 2}{m(m-1)}\right)^n \right\}$$

- **Initialisation :** $\pi_{0,k}$ est une probabilité donc
$$\pi_{0,k} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1.$$
L'initialisation est bien vérifié.
- **Hérédité :** On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\forall k \in [\![1; m?1]\!]$, $\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
Alors pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, on a :
$$\pi_{n+1,k} \leq \frac{(k-1)(m+1-k)+[m(m-1)-2k(m-k)]+(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
On simplifie le numérateur du premier facteur qu'on note N :
$$\begin{aligned} N &= (k-1)(m+1-k)+[m(m-1)-2k(m-k)]+(k+1)(m-1-k) \\ &= k(m-k)+k-m-1+k+m(m-1)-2k(m-k)+k(m-k)-k+m-1-k \\ &= k(m-k)[1-2+1]+k(1+1-1-1)+m(-1+1)+m(m-1)-2 \\ &= m(m-1)-2 \end{aligned}$$
ce qui donne enfin :
$$\begin{aligned} \pi_{n+1,k} &\leq \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$
La propriété est vraie au rang n + 1.
- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$
$$\boxed{\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

(a) Comme une seule personne peut changer d'avis chaque jour, on a
$$|X_{n+1} - X_n| \leq 1$$
donc $Z_n(\Omega) \subset \{-1; 0; 1\}$.

De plus, avec $X_n = 1$ qui peut donner avec une probabilité non nulle $X_{n+1} = 0$, $X_{n+1} = 1$ et $X_{n+1} = 2$ on a bien $\{-1; 0; 1\} \subset Z_n(\Omega)$ et enfin
$$\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}.}$$

(b) Avec le système complet d'évènement $(X_n = k)_{k \in [\![0;m]\!]}$ on a :
$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \sum_{k=0}^{m} P\left((Z_n = 1) \cap (X_n = k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P\left((X_{n+1} - X_n = 1) \cap (X_n = k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P\left((X_{n+1} = k+1) \cap (X_n = k)\right) \end{aligned}$$

Or $X_{n+1} = m+1$ est impossible et $(X_n = 0) \cap (X_{n+1} = 1)$ également car si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = 0$. Enfin, en utilisant la formule des probabilités composées et avec le résultat du $1(a)$, on a

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) \\ &\boxed{= \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k} \times \frac{k(m-k)}{m(m-1)}} \end{aligned}$$

(c) Un raisonnement identique donne (avec $(X_{n+1} = ?1)$ et $(X_n = m) \cap (X_{n+1} = m-1)$ impossibles) :

$$\begin{aligned} P(Z_n = -1) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k} \times \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \\ &\boxed{= P(Z_n = 1)} \end{aligned}$$

(d) On en déduit que

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= -1 \times P(Z_n = -1) + 0 \times P(Z_n = 0) + 1 \times P(Z_n = 1) \\ &= -P(Z_n = 1) + P(Z_n = 1) \\ &\boxed{= 0} \end{aligned}$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'espérance

$$E(Z_n) = E(X_{n+1}) - E(X_n) = 0$$

donc $E(X_{n+1}) = E(X_n)$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = E(X_0) = a$$

car X_0 est une variable aléatoire certaine égale à a.

$$\boxed{\text{La suite } (E(X_n))_n \text{ est bien constante égale à } a.}$$